全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品高考

第二轮专题

北京专版

数学

听课手册

主编 肖德好

延边教育出版社

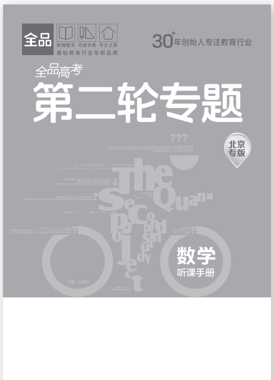
全品高考第二轮专题 数学 北京专版

高三考生 透析命题 聚焦答卷 » 理想的高考成绩

二轮复习

考试多，时间紧
题量大，做不完 ？

《全品高考第二轮专题》—— 精 准 透



6大模块统领**二轮复习**

8个综合实现**提能进阶**

2页作业**限时限量**

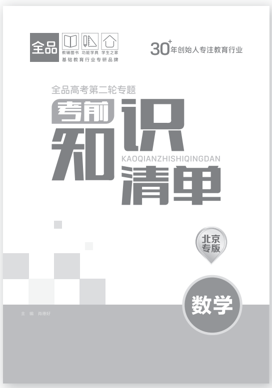
全解全析，方便使用

一轮复习 有的放矢

跳出题海 精准备考

只做真正的**北京专版**

精选试题，特别关注北京高考试卷结构
知识点命题特点、知识点之间的联系
题干特点、选项特点
设问特点、答题特点
……



知识回顾，强化要点
突出考查重点
必记公式，提警易错点
速查轻松便捷

考前梳理 巩固要点

抓住**阅卷人眼睛**

1. 数学符号答题。 2. 逻辑清晰，必要的文字说明，条件完整。
3. 字迹清晰整齐，书写规范，注意错别字。

CONTENTS 目录

01 高考专题讲练

高考六大模块题型解法攻略

模块一 函数、不等式与导数

模块二　三角函数、平面向量与解三角形

模块三　数列

模块四　立体几何

模块五　解析几何

02 考前知识清单(另附分册)

- 教材再现
- 易错提醒
- 必记公式

03 特色专项(另附分册)

- 贴近真题特点
- 分类强化训练
- 考查内容全面

The part one
第一部分　小题快练
精选模拟题练习，提升高考体验

The part two
第二部分　大题冲关
加强答题规范性，有效快捷提分

思想篇 数学思想方法的应用

思想一　函数与方程思想

函数思想就是用运动和变化的观点,分析和研究数学中的数量关系,是对函数概念本质的认识,建立函数关系或构造函数,运用函数的图象和性质去分析问题、转化问题,从而使问题获得解决.如求数列中的项或最值、求解三角形最值范围问题、求不等式中的参数、求解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题,往往都可利用函数思想转化为函数问题.

方程思想就是分析数学问题中变量间的等量关系,建立方程或方程组,或者构造方程,通过解方程或方程组,或者运用方程的性质去分析问题、转化和解决问题.如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式系数等问题.

真题示例

1. [2025·全国二卷]已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$,$\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$,若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则 $|\boldsymbol{a}|=$________.

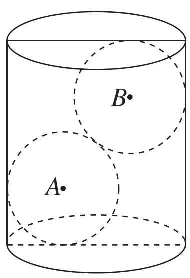
[解法关键]

根据向量坐标运算得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,1-2x)$,再利用向量垂直的坐标表示得到方程,解出即可.答案:$\sqrt{2}$.

2. [2025·全国二卷]一个底面半径为 4 cm,高为 9 cm 的封闭圆柱形容器(容器壁厚度忽略不计)内有两个半径相等的铁球,则铁球半径的最大值为________cm.

[解法关键]

根据圆柱与球的性质以及球与圆柱的位置关系(如图)列方程可求出铁球的半径.答案:2.5.



3. [2024·北京卷]汉代刘歆设计的“铜嘉量”是龠、合、升、斗、斛五量合一的标准量器,其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱.若升、斗、斛量器的容积成公比为 10 的等比数列,底面直径依次为 65 mm,325 mm,325 mm,且斛量器的高为 230 mm,则斗量器的高为________mm,升量器的高为________mm.

[解法关键]

根据容积成公比为 10 的等比数列可得关于高度的方程组,求出其解后可得两个圆柱的高度.答案:23,$\frac{115}{2}$.

自测题

1. [2025·西城二模]设圆 $x^2+y^2+4x-6y+5=0$ 的圆心为 M,直线 $y=-x+t$ 与该圆相交于 A,B 两点.若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-4$,则实数 $t=$ (　　)

A. 1　　B. 3 或 1　　C. 3　　D. 3 或 −1

2. [2024·顺义一模]设 $a=\frac{\ln 2}{2}$,$b=\frac{\ln 6}{6}$,$c=\frac{1}{\mathrm{e}}$,则 (　　)

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $a<c<b$

3. [2025·北师大实验中学测试]已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{b}=(-3,4)$,$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda>0)$,则 $\boldsymbol{a}=$ (　　)

A. $\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$　　B. $\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

C. $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$　　D. $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$

4. [2025·延庆一模]“$k=\frac{1}{2}$”是“直线 $y=kx+2$ 与抛物线 $y^2=4x$ 只有一个公共点”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

思想二　数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法. 数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面. 数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

真题示例

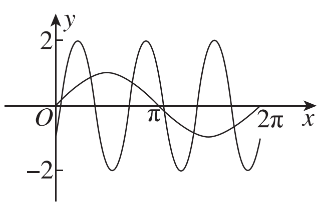
1. [2024·新课标Ⅰ卷] 当 $x\in[0,2\pi]$时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$的交点个数为（　　）

A. 3　　B. 4

C. 6　　D. 8

[解法关键]

分别画出函数 $y=\sin x$ 和函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在$[0,2\pi]$上的图象，如图所示，由图可知，两曲线有 6 个交点. 答案：C.



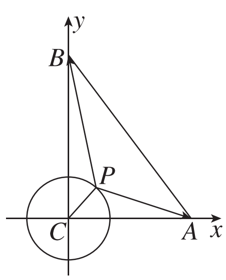
2. [2022·北京卷] 在△ABC 中，$AC=3$，$BC=4$，$\angle C=90°$. P 为△ABC 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是（　　）

A. $[-5,3]$　　B. $[-3,5]$

C. $[-6,4]$　　D. $[-4,6]$

[解法关键]

根据条件建立平面直角坐标系，设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，计算可得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-3\cos\theta-4\sin\theta+1$，进而可利用参数方程转化为三角函数的最值问题求解. 答案：D.



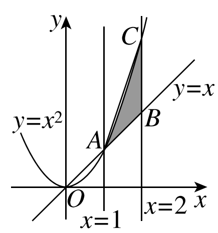
3. [2024·北京卷] 已知 $M=\{(x,y)\mid y=x+t(x^2-x),1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant t\leqslant 1\}$是平面直角坐标系中的点集. 设 d 是 M 中两点间的距离的最大值，S 是 M 表示的图形的面积，则（　　）

A. $d=3,S<1$　　B. $d=3,S>1$

C. $d=\sqrt{10},S<1$　　D. $d=\sqrt{10},S>1$

[解法关键]

先以 t 为变量，分析可知所求集合表示的图形即为不等式组$\begin{cases}y\leqslant x^2,\\y\geqslant x,\\1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$表示的平面区域(图中阴影部分)，结合图形分析求解即可. 答案：C.



自测题

1. [2025·北京清华附中测试] 已知 $0<c<1$，且 $3^a=b^3=c$，则（　　）

A. $b<a<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<c<a$　　D. $a<b<c$

2. [2025·延庆一模] 已知正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，若在该正方体的棱上有点 M，满足 $MB+MC_1=\sqrt{3}$，则点 M 的个数为（　　）

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

3. [2025·北京人大附中测试] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x|x+1|,x\leqslant 1,\\e^{x-1},x>1,\end{cases}$若函数 $g(x)=f(x)-mx$ 有三个零点，则实数 m 的取值范围为________.

思想三　分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题，通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略，实质上就是“化整为零，各个击破，再积零为整”的策略.其研究的基本方向是“分”，但分类解决问题之后，还必须把它们整合在一起.使用分类讨论思想应明白这样几点：一是引起分类讨论的原因；二是分类讨论的原则，不重不漏，分类标准统一；三是明确分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种：(1)由概念引起的分类讨论；(2)由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论；(3)由数学运算引起的分类讨论；(4)由图形的不确定性引起的分类讨论；(5)由参数的变化引起的分类讨论.

真题示例

1. ［2024·新课标Ⅱ卷］设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geqslant 0$，则 a^2+b^2 的最小值为（　）

A. $\frac{1}{8}$　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 1

［解法关键］

方法一：由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-b,+\infty)$，分类讨论 $-a$ 与 $-b$，$1-b$ 的大小关系，结合符号分析判断，即可得 $b=a+1$，代入可得最值.

方法二：根据对数函数的性质分析 $\ln(x+b)$ 的符号，通过分类讨论进而可得 $x+a$ 的符号，即可得 $b=a+1$，代入可得最值.答案：C.

2. ［2024·全国甲卷］有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中无放回地随机取 3 次，每次取 1 个球.设 m 为前两次取出的球上数字的平均值，n 为取出的三个球上数字的平均值，则 m 与 n 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

［解法关键］

根据排列可求样本点的总数，设前两个球的号码为 a，b，第三个球的号码为 c，则 $a+b-3\leqslant 2c\leqslant a+b+3$，就 c 的不同取值分类讨论后可求随机事件的概率.答案：$\frac{7}{15}$.

3. ［2022·北京卷］设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, & x<a,\\(x-2)^2, & x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为________；a 的最大值为________.

［解法关键］

对分段函数 $f(x)$ 的分界点进行分类讨论，分类情况有 $a<0$，$a=0$，$0<a\leqslant 2$，$a>2$.答案为：0(答案不唯一)，1.

自测题

1. ［2025·北京人大附中测试］已知函数 $f(x)=a\cos x-x^2$，则 $f(x)$ 的极值点的个数情况可能为（　）

A. 没有极值点

B. 有无穷多个极值点

C. 恰有 2025 个极值点

D. 恰有 2026 个极值点

2. ［2025·北师大附中测试］已知 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列，其前 n 项和为 S_n，$a_1=3$，$S_2=\frac{3}{2}$.若对任意正整数 n，都有 $S_n-(-1)^n\cdot A>0$，则 A 的取值范围是

A. $(-3,1)$　B. $[-2,1]$

C. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$　D. $\left[-2,\frac{3}{2}\right)$

3. ［2025·西城二模］设正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，P 为正方体表面上一点，且点 P 到直线 AA_1 的距离与它到平面 $ABCD$ 的距离相等，记动点 P 的轨迹为曲线 W，则曲线 W 的周长为（　）

A. $3\sqrt{2}$　B. $2\sqrt{2}+\pi$

C. $6\sqrt{2}$　D. $4\sqrt{2}+\pi$

4. ［2025·北京八十中测试］已知 $a>0$，$a\neq 1$，函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2-x, & x\leqslant 1,\\a^{x-1}-1, & x>1\end{cases}$ 有最小值，则 a 的取值范围是（　）

A. $(1,+\infty)$　B. $(0,1)$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

思想四　转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究解决数学问题时，采用某种手段将问题转化，使问题得以解决的一种思维策略，其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题，将较难的问题化归为较简单的问题，将未能解决的问题化归为已经解决的问题，简单说就是化“生”为“熟”.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在：将抽象函数问题转化为具体函数问题，立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形问题，“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维，空间与平面的转化，相等问题与不等问题的转化等.

真题示例

1. [2021·北京卷] 函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$ 是 (　　)

A. 奇函数，且最大值为 2

B. 偶函数，且最大值为 2

C. 奇函数，且最大值为$\frac{9}{8}$

D. 偶函数，且最大值为$\frac{9}{8}$

[解法关键]

利用定义判断奇偶性，利用二倍角余弦公式，将函数转化为关于 $\cos x$ 的二次函数形式，从而确定最大值. 答案:D.

2. [2023·北京卷] 在$\triangle ABC$ 中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则$\angle C=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

[解法关键]

先利用正弦定理将条件中的边角关系式转化为边的关系式，再利用余弦定理求角. 答案:B.

3. [2024·北京卷] 若直线 $y=k(x-3)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 只有一个公共点，则 k 的一个取值为________.

[解法关键]

联立直线与双曲线的方程，化简整理得关于 x 的方程，再分类讨论，并结合判别式，可得 k 的取值. 答案:$\frac{1}{2}\left(\text{或}-\frac{1}{2}\right)$.

自测题

1. [2025·北京十一学校测试] 已知函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，且函数 $g(x)=f(x)-a$ 在$[0,n\pi](n\in\mathbf{N}^*)$内恰有 2025 个零点，则满足条件的有序数对$(a,n)$ (　　)

A. 有且仅有 1 对　　B. 有且仅有 2 对

C. 有且仅有 3 对　　D. 有无数对

2. [2025·东城一模] 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x^2-1}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=a\mid x+a\mid\}$，若 $A\cap B$ 有且只有两个元素，则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

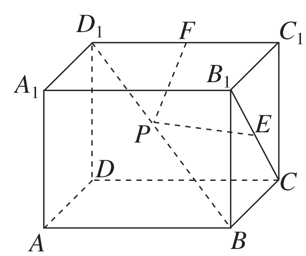
C. $[0,1]$　　D. $[0,1)\cup(1,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{|x-1|},x>0,\\-x^2-2x+1,x\leqslant 0,\end{cases}$ 若方程 $[f(x)]^2+bf(x)+2=0$ 有 8 个相异实根，则实数 b 的取值范围为 (　　)

A. $(-4,-2)$　　B. $(-4,-2\sqrt{2})$

C. $(-3,-2)$　　D. $(-3,-2\sqrt{2})$

4. [2025·北京二中测试] 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=BB_1=1$，E 为线段 B_1C 的中点，F 是棱 C_1D_1 上的动点，若点 P 为线段 BD_1 上的动点，则 $PE+PF$ 的最小值为 (　　)



A. $\sqrt{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

方法篇 选填题的特殊解法

方法一　特殊法

在解决选择题和填空题时，可以取一个(或一些)特殊数值(或特殊位置、特殊函数、特殊点、特殊方程、特殊数列、特殊图形等)来确定其结果，这种方法称为特值法.特值法只需对特殊数值、特殊情形进行检验，省去了推理论证、烦琐演算的过程，提高了解题的速度.特例法是考试中解答选择题和填空题时经常用到的一种方法，应用得当可以起到“四两拨千斤”的功效.

(1)使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊化情况也一定成立.

(2)使用技巧：找到满足条件的合适的特殊化例子，或举反例排除，有时甚至需要两次或两次以上特殊化例子才可以确定结论.

(3)常见问题：求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等.

真题示例

1. [2024·全国甲卷] 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_9=1$，则$a_3+a_7=$　　(　　)

A. -2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. 1　　D. $\frac{2}{9}$

[解法关键]

本题除了利用等差数列的基本量方法，利用等差数列的性质求解外，采用特例法求解非常快捷.不妨取等差数列的公差$d=0$，则$S_9=1=9a_1$，可得$a_1=\frac{1}{9}$，则$a_3+a_7=2a_1=\frac{2}{9}$.答案：D.

2. [2024·新课标Ⅱ卷] 已知曲线C：$x^2+y^2=16$ $(y>0)$，从C上任意一点P向x轴作垂线PP'，P'为垂足，则线段PP'的中点M的轨迹方程为　　(　　)

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

[解法关键]

在曲线C上取一点$(0,4)$，向x轴作垂线段，中点坐标为$(0,2)$，代入各选项中，只有A符合.答案：A.

3. [2024·北京卷] 已知(x_1,y_1)，(x_2,y_2)是函数$y=2^x$的图象上两个不同的点，则　　(　　)

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

[解法关键]

根据指数函数和对数函数的单调性结合基本不等式分析判断A,B；举例判断C,D，对于选项C，例如$x_1=-2$，$x_2=-1$，则$y_1=\frac{1}{4}$，$y_2=\frac{1}{2}$；对于选项D，例如$x_1=0$，$x_2=1$，则$y_1=1$，$y_2=2$.答案：B.

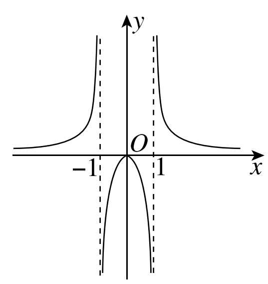
自测题

1. [2024·朝阳外国语学校测试] 已知$x^3-y^3<2^{-x}-2^{-y}$，则下列结论中正确的是　　(　　)

A. $\ln\left|\frac{y}{x}\right|>0$　　B. $\ln(y-x+1)>0$

C. $\ln|y+x|>0$　　D. $\ln|y-x|>0$

2. [2025·天津卷] 已知函数$y=f(x)$的图象如图，则$f(x)$的解析式可能为　　(　　)



A. $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$　　B. $f(x)=\frac{x}{|x|-1}$

C. $f(x)=\frac{|x|}{1-x^2}$　　D. $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$

3. [2025·延庆一模] 设 $x,y\in\mathbf{R}$,且 $0<x<y<1$,则 ( )

A. $x^2>y^2$

B. $\sin x>\sin y$

C. $4^x>2^y$

D. $x+\frac{1}{x}>y(2-y)$

4. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,对于任意正整数 m,n,都满足 $a_{m+n}=a_m+a_n+mn$,则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2025}}=$________.

方法二 验证法

验证法是将选项或特殊值代入题干逐一去验证是否满足题目条件,然后选择符合题目条件的选项的一种方法.在运用验证法解题时,若能根据题意确定代入顺序,则能提高解题速度.

(1)使用前提:各选项可分别作为条件.

(2)使用技巧:可以结合特值法、排除法等先否定一些明显错误的选项,再选择直觉认为最有可能的选项进行验证,这样可以快速获得答案.

(3)常见问题:题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算烦琐的问题等.

真题示例

1. [2023·北京卷] 下列函数中,在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是 ( )

A. $f(x)=-\ln x$

B. $f(x)=\frac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\frac{1}{x}$

D. $f(x)=3^{|x-1|}$

[解法关键]

利用基本初等函数的单调性,结合复合函数的单调性对各选项逐一验证.答案:C.

2. [2021·北京卷] 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为 2,且过点$(\sqrt{2},\sqrt{3})$,则双曲线的方程为 ( )

A. $2x^2-y^2=1$

B. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

C. $5x^2-3y^2=1$

D. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$

[解法关键]

利用各选项的 a,c 值验证离心率 2,发现 A,C 错误,利用经过的点$(\sqrt{2},\sqrt{3})$验证 D 错误.答案:B.

3. [2023·新课标Ⅱ卷] 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x$ 在区间$(1,2)$单调递增,则 a 的最小值为 ( )

A. e^2

B. e

C. e^{-1}

D. e^{-2}

[解法关键]

$f'(x)=a\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$,当 a 的值取 A,B,C 中的值时,$f'(x)\geqslant0$ 在$(1,2)$上恒成立,当 a 的值取 e^{-2} 时,$f'(x)\geqslant0$ 在$(1,2)$上不恒成立,故最小值为 C 中的值.答案:C.

自测题

1. [2025·门头沟一模] 下列函数中,既是奇函数又在$(0,+\infty)$上单调递增的是 ( )

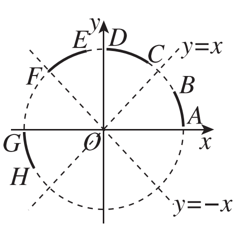
A. $y=x-\frac{1}{x}$

B. $y=x^3-x$

C. $y=x^{\frac{1}{2}}$

D. $y=\tan x$

2. [2025·海淀模拟] 在平面直角坐标系中,$\overset{\frown}{AB}$,$\overset{\frown}{CD}$,$\overset{\frown}{EF}$,$\overset{\frown}{GH}$是圆 $x^2+y^2=1$ 上的四段弧(如图),点 P 在其中一段上,角 α 以 O 为顶点,Ox 为始边,OP 为终边.若 $\tan\alpha<\cos\alpha<\sin\alpha$,则 P 所在的圆弧是 ( )



A. $\overset{\frown}{AB}$

B. $\overset{\frown}{CD}$

C. $\overset{\frown}{EF}$

D. $\overset{\frown}{GH}$

3. [2024·北京清华附中测试] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x\geqslant2,\\2-x,x<2,\end{cases}$则满足 $f(x)\leqslant2$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $[0,4]$

B. $(0,4]$

C. $[-2,4]$

D. $[-2,0]$

4. [2024·北京人大附中三模] 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$且$a_{n+1}=S_n^2+1(n\in\mathbf{N}^*)$，给出下列四个结论：①长度分别为$1,a_{n+1},S_n$的三条线段可以构成一个直角三角形；②$\forall n\in\mathbf{N}^*,S_n\geqslant 2^{n-1}$；③$\forall n\in\mathbf{N}^*,a_n+a_{n+2}<2a_{n+1}$；④$\forall n\in\mathbf{N}^*,a_{n+1}=2a_n\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

其中所有正确结论的序号是________.

方法三　构造法

构造法是一种创造性的解题方法，它很好地体现了数学中的发散、类比、转化思想，是指根据题设条件和结论的特征、性质，运用已知数学关系式和理论，构造出满足条件或结论的数学对象，从而使原问题中隐含的关系和性质在新构造的数学对象中清晰地展现出来，并借助该数学对象方便快捷地解决数学问题的方法.构造法应用的技巧是“定目标构造”，需从已知条件入手，紧扣要解决的问题，把陌生的问题转化为熟悉的问题，解题时常构造函数、方程、几何图形等.

(1)使用前提：所构造的函数、方程、几何图形等要合理，不能超出原题的限制条件.

(2)使用技巧：对于不等式、方程、函数问题常采用构造新函数，对于不规则的几何体常构造成规则几何体处理.

(3)常见问题：比较大小、函数导数问题、不规则的几何体问题等.

真题示例

1. [2022·新高考全国Ⅰ卷] 设$a=0.1\mathrm{e}^{0.1}$，$b=\dfrac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则 (　　)

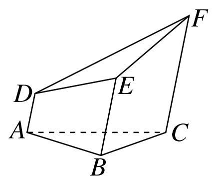
A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

[解法关键]

构造函数$f(x)=(1-x)\mathrm{e}^x(0<x<1)$和$g(x)=x\mathrm{e}^x+\ln(1-x)(0<x\leqslant 0.1)$，利用导数性质求出$a<b$和$a>c$，由此能求出结果.答案:C.

2. [2024·天津卷] 一个五面体$ABC\text{-}DEF$如图所示，已知$AD/\!/BE/\!/CF$，且两两之间的距离为1，并已知$AD=1$，$BE=2$，$CF=3$，则该五面体的体积为 (　　)



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{2}$

[解法关键]

采用补形法将五面体$ABC\text{-}DEF$补成一个三棱柱，再利用用体积公式即可.答案:C.

3. [2024·全国甲卷] 曲线$y=x^3-3x$与$y=-(x-1)^2+a$在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点，则a的取值范围为________.

[解法关键]

将函数转化为方程，令$x^3-3x=-(x-1)^2+a$，分离参数a，构造新函数$g(x)=x^3+x^2-5x+1(x>0)$，结合导数求得$g(x)$的单调区间，画出$y=g(x)$的大致图象，数形结合即可求解.答案:$(-2,1)$.

自测题

1. 设$a=\sin 0.2$，$b=0.2\cos 0.1$，$c=2\sin 0.1$，则 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

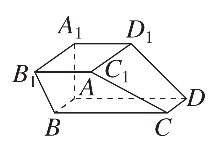
C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

2. [2024·朝阳二模] 已知n个大于2的实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，对任意$x_i(i=1,2,\cdots,n)$，存在$y_i\geqslant 2$满足$y_i<x_i$且$x_i^{y_i}=y_i^{x_i}$，则使得$x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 15x_n$成立的最大正整数$n$为 (　　)

A. 14　　B. 16

C. 21　　D. 23

3. [2024·东城二模] 如图，在六面体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，平面$ABCD/\!/$平面$A_1B_1C_1D_1$，四边形$ABCD$与四边形$A_1B_1C_1D_1$是两个全等的矩形.$AB/\!/A_1B_1$，$AD/\!/A_1D_1$，$AA_1\perp$平面$ABCD$，$AB=B_1C_1=2$，$BC=A_1B_1=4$，$AA_1=2$，则$BB_1=$________，该六面体的任意两个顶点间距离的最大值为________.



自习篇 集合、复数、常用逻辑用语、不等式的性质与基本不等式、统计

自习一 集合

1. [2024·北京卷] 已知集合 $M=\{x\mid -3<x<1\}$,$N=\{x\mid -1\leqslant x<4\}$,则 $M\cup N=$ ( )

A. $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$ B. $\{x\mid x>-3\}$

C. $\{x\mid -3<x<4\}$ D. $\{x\mid x<4\}$

2. 设集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\frac{x-3}{x+1}\leqslant 0\right.\right\}$,$B=\{x\mid \log_2(x+2)\leqslant 2\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $[-1,2]$ B. $(-1,2]$

C. $\{-1,0,1,2\}$ D. $\{0,1,2\}$

3. [2025·北京卷] 集合 $M=\{x\mid 2x-1>5\}$,$N=\{1,2,3\}$,则 $M\cap N=$ ( )

A. $\{1,2,3\}$ B. $\{2,3\}$

C. $\{3\}$ D. $\varnothing$

4. [2025·海淀一模] 已知集合 $U=\{x\mid |x|>1\}$,$A=\{x\mid x\geqslant 2\}$,则 $\complement_U A=$ ( )

A. $(-\infty,2)$ B. $(-\infty,-1)\cup(1,2]$

C. $(-\infty,2]$ D. $(-\infty,-1)\cup(1,2)$

【技巧点拨】

解决集合问题时要注意以下几点:(1)集合中元素的互异性;(2)不能忽略空集;(3)要注意端点的取值;(4)对于描述法表示的集合,要注意代表元素的意义.

自习二 复数

1. [2023·北京卷] 在复平面内,复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$,则 z 的共轭复数 $\overline{z}=$ ( )

A. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ B. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ D. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

2. [2025·朝阳二模] 设复数 $z=1+\mathrm{i}$ 的共轭复数为 $\overline{z}$,则 $z\cdot\overline{z}=$ ( )

A. 1 B. $\sqrt{2}$

C. 2 D. 4

3. [2025·北京卷] 已知复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z+2=2\mathrm{i}$,则 $|z|=$ ( )

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$

C. 4 D. 8

4. [2025·西城二模] 设 i 为虚数单位,则在复平面内,复数 $\frac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 对应的点位于 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

5. 若复数 $\frac{a+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ $(a\in\mathbf{R})$ 是纯虚数,则 $a=$________.

【技巧点拨】

(1)复数运算的重点是除法运算,其关键是进行分母实数化;(2)利用复数相等 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$ 求解时,要注意 a,b,c,d 为实数的前提条件.

自习三　常用逻辑用语

1. ［2023・北京卷］若 $xy\neq0$,则“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的　（　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,则“$\tan\alpha=-\tan\beta$”是“存在 $k\in\mathbf{Z}$,使得 $\alpha+\beta=(-1)^k\pi$”的　（　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

3. ［2025・北京卷］已知函数 $f(x)$的定义域为 D,则“函数 $f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$”是“对任意 $M\in\mathbf{R}$,存在 $x_0\in D$,使得$|f(x_0)|>M$”的　（　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

4. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,则“$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$”是“对于任意的实数 λ,都有$|\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|$”的　（　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

5. ［2023・房山一模］能够说明“设 a,b,c 是任意实数,若 $a<b<c$,则 $ac<bc$”是假命题的一组整数 a,b,c 的值依次为________.

【技巧点拨】

若 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件,要注意推理的方向,难点还是在于与之相关知识的考查.另外要注意“A 是 B 的充分条件”与“B 是 A 的充分条件”是不同的概念.

自习四　不等式的性质与基本不等式

1. ［2025・海淀二模］设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,$abc\neq0$,且 $a>b>c$,则　（　）

A. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>2$　B. $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}<2$

C. $2a>b+c$　D. $a+b>c$

2. ［2025・北京卷］已知 $a>0,b>0$,则　（　）

A. $a^2+b^2>2ab$　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$　D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$

3. ［2025・北京北大附中测试］已知 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a>b>0$,则　（　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　B. $3^a>2^b$

C. $\ln a+\ln b>0$　D. $\left(\frac{1}{3}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$

4. ［2025・北京四中测试］已知 $a>b>0$ 且 $ab=10$,则下列结论中不正确的是　（　）

A. $\lg a+\lg b>0$　B. $\lg a-\lg b>0$

C. $\lg a\cdot\lg b<\frac{1}{4}$　D. $\frac{\lg a}{\lg b}>1$

5. ［2025·北师大实验测试］已知 $a>0,b\in\mathbf{R}$,若关于 x 的不等式 $(ax-2)(x^2+bx-8)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,则 $b+\frac{4}{a}$ 的最小值是 （　）

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$

C. 8　　D. $8\sqrt{2}$

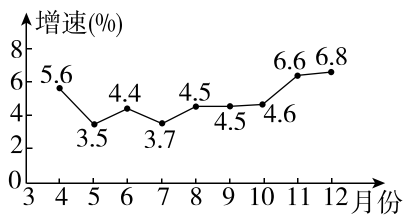
【技巧点拨】

(1)要准确使用不等式的有关性质;(2)合理举出一些反例进行排除论证;(3)不要忽略使用基本不等式时的条件;(4)当多次使用基本不等式时,要注意等号是否同时成立.

自习五　统计

1. 近年来,我国国民经济运行总体稳定,延续回升向好态势.如图是我国 2023 年 4 月到 2023 年 12 月规模以上工业增加值同比增长速度(以下简称增速)统计图.

注:规模以上工业指年主营业务收入 2000 万元及以上的工业企业.



下列说法正确的是 （　）

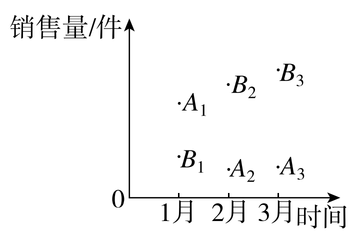
A. 4 月、5 月、6 月这三个月增速的方差比 4 月、5 月、6 月、7 月这四个月增速的方差大

B. 4 月、5 月、6 月这三个月增速的平均数比 4 月、5 月、6 月、7 月这四个月增速的平均数小

C. 连续三个月增速的方差最大的是 9 月、10 月、11 月这三个月

D. 连续三个月增速的平均数最大的是 9 月、10 月、11 月这三个月

2. 如图为某商铺 A,B 两种商品在 2024 年前 3 个月的销售情况统计图,已知 A 商品卖出一件盈利 20 元,B 商品卖出一件盈利 10 元.图中点 A_1,A_2,A_3 的纵坐标分别表示 A 商品 2024 年前 3 个月的销售量,点 B_1,B_2,B_3 的纵坐标分别表示 B 商品 2024 年前 3 个月的销售量.根据图中信息,下列四个结论中正确的是 （　）



①2 月 A,B 两种商品的总销售量最多;

②3 月 A,B 两种商品的总销售量最多;

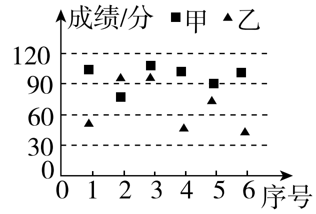
③1 月 A,B 两种商品的总盈利最多;

④2 月 A,B 两种商品的总盈利最多.

A. ①③　　B. ①④

C. ②③　　D. ②④

3. 已知甲、乙两名同学 6 次数学测试的成绩(单位:分)统计如图,则下列说法不正确的是 (　　)



A. 甲成绩的极差小于乙成绩的极差

B. 甲成绩的中位数小于乙成绩的第 75 百分位数

C. 甲成绩的平均数大于乙成绩的平均数

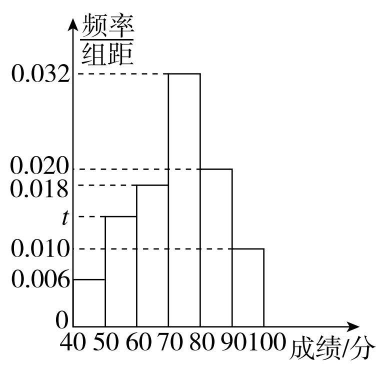
D. 甲成绩的方差小于乙成绩的方差

4. [2025·通州期末] A,B,C 三个班共有 120 名学生,为调查他们的体育锻炼情况,通过比例分配的分层随机抽样获得了部分学生一周的锻炼时间,数据如下表(单位:小时).

A 班	6	6.5	7	7.5	8	8	
B 班	6	7	8	9	10	11	12
C 班	4	6.5	8	8.5	10	12.5	13.5

估计 A 班的学生人数为________;设 B 班体育锻炼时间的方差为 s_1^2,C 班体育锻炼时间的方差为 s_2^2,则 s_1^2________s_2^2(填>,<或=).

5. 某学校从全校学生中随机抽取了 50 名学生作为样本进行数学知识测试,记录他们的成绩,测试卷满分 100 分,将所得数据分成 6 组:[40,50),[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100],并整理得到如图所示的频率分布直方图.图中 t 的值为________;若全校学生参加同样的测试,估计全校学生的平均成绩为________分.



【技巧点拨】

(1)抽样问题的重点是比例分配的分层随机抽样及其相关计算;(2)统计图表问题,一是要从中得出有关数字特征,如中位数、平均数、百分位数、方差等计算,二是要从图表中发现其反馈出来的信息,如优劣比较、变化趋势等.

模块一　函数、不等式与导数

微专题 1　函数的图象与性质

考点要求	考题统计	考情分析
函数的图象与性质	2025 年北京卷第 4、7 题 2024 年北京卷第 7、9 题 2023 年北京卷第 4、11、15 题 2022 年北京卷第 7、11、14 题 2021 年北京卷第 3 题	函数的图象与性质 (1)对函数的性质(如单调性、奇偶性、周期性)的考查,其主要载体是指数函数、对数函数和分段函数,多为选填题中的中档题; (2)考查指对运算与指对函数模型,多以中档题出现; (3)考查函数性质的综合运用,此类问题对恒等变形、等价转化的能力要求较高,多为选填题中的压轴题

考法探析 · 明规律

微点 1　函数的概念与表示

1. [2025 · 朝阳一模] 已知函数 $f(x)=|x|-|x-2|+1$,则对任意实数 x,有 ( )

A. $f(1-x)=2-f(1+x)$　　B. $f(-x)=-f(x)-2$

C. $f(2-x)=2+f(x)$　　D. $f(2+x)=f(2-x)$

2. [2023 · 北京卷] 已知函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$__________.

3. [2022 · 北京卷] 函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是__________.

微点 2　函数的单调性与奇偶性

例 1　下列函数中,在区间(0,1)内不单调的是 ( )

A. $y=\ln(x+1)$　　B. $y=2^{1-x}$

C. $y=\tan 2x$　　D. $y=x^2+\sqrt{x}$

例 2　已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, x\leqslant 0,\\ x+\frac{1}{x}+a, x>0.\end{cases}$ 若 $a=0$,则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为________;若 $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值,则实数 a 的取值范围为________.

[听课笔记]

【规律提炼】

判断函数奇偶性、单调性的关键：

(1)函数奇偶性、单调性的定义及相关结论(如奇函数×偶函数=奇函数)；

(2)借助函数的图象，可以通过图象的平移、伸缩、对称这些变换得到目标函数图象，注意特殊点的关键作用.

自测题

1. [2024·西城一模] 下列函数中，既是偶函数又在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是 ( )

A. $y=x^2+x$　　B. $y=\cos x$

C. $y=2^x$　　D. $y=\log_2|x|$

2. [2025·北京十一学校测试] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x-1, x\leqslant 1,\\ x^2-ax+4a-5, x>1\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围为 ( )

A. $(1,2]$　　B. $[1,2]$

C. $\left(\frac{3}{2},2\right]$　　D. $\left[\frac{3}{2},2\right]$

3. [2025·朝阳二模] 已知函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x+e^{2-x}$，则 $f(-2)=$________；若存在 $a,b,c\in\mathbf{R}(a\neq b)$，使得 $f(a)=f(b)=c$，则 c 的一个取值为________.

微点3　基本初等函数图象与性质

例3 [2025·朝阳一模] 已知 $a=\log_{0.5}0.2, b=0.5^{0.5}, c=2^{0.5}$，则 ( )

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

例4 已知(x_1,y_1)，(x_2,y_2)是函数 $y=\log_2 x$ 的图象上两个不同的点，则下列结论正确的是 ( )

A. $\frac{y_1-y_2}{2}<x_1-x_2$　　B. $\frac{y_1-y_2}{2}>x_1-x_2$

C. $y_1+y_2<x_1+x_2$　　D. $y_1+y_2>x_1+x_2$

[听课笔记]

【规律提炼】

研究基本初等函数的图象与性质要特别注意：

(1)指、对函数的底数对函数性质的影响；

(2)一些特殊点和特殊线，如指、对函数的图象恒过的点，渐近线，同底指、对函数图象的对称轴.

自测题

1. [2025·东城一模] 已知 $x>1, y>1$，则"$4^x>2^y$"是"$\log_2 x>\log_4(y-1)$"的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. ［2025·北京卷］为得到函数 $y=9^x$ 的图象，只需把函数 $y=3^x$ 的图象上的所有点　　（　　）

A. 横坐标变成原来的$\dfrac{1}{2}$，纵坐标不变

B. 横坐标变成原来的 2 倍，纵坐标不变

C. 纵坐标变成原来的$\dfrac{1}{3}$，横坐标不变

D. 纵坐标变成原来的 3 倍，横坐标不变

3. ［2025·海淀二模］已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+4}$，则 $f(x)$的值域为________，曲线 $y=f(x)$的对称中心为________.

微点4　函数模型与应用

例5 ［2024·北京卷］生物丰富度指数 $d=\dfrac{S-1}{\ln N}$是河流水质的一个评价指标，其中 S，N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数.生物丰富度指数 d 越大，水质越好.如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化，生物个体总数由 N_1 变为 N_2，生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15，则　　（　　）

A. $3N_2=2N_1$　　B. $2N_2=3N_1$

C. $N_2^2=N_1^3$　　D. $N_2^3=N_1^2$

例6 ［2025·海淀二模］中华人民共和国国家标准(GB11533—2011)中的《标准对数视力表》采用的是视力五分记录法(缪氏记录法)：$L=5-\lg\dfrac{kd}{D}$，其中 L 为被测试眼睛的视力值，d 为该眼睛能分辨清楚的最低一行“E”形视标的笔划宽度(单位：毫米)，D 为眼睛到视标的距离(单位：米)，如图①所示，k 是与 d，D 无关的常量.图②是标准视力表的一部分，一个右眼视力值为 5.0 的人在距离该视力表 5 米处进行检测，能分辨的最低一行视标为图②中虚线框部分.因条件所限，小明在距离该视力表 3 米处进行检测，若此时他的右眼能分辨的最低一行视标也为图②中虚线框部分，不考虑其他因素的影响，则与小明右眼的实际视力值最接近的为(参考数据：$\lg 2\approx0.30$，$\lg 3\approx0.48$)　　（　　）

①

②

A. 4.5　　B. 4.6

C. 4.8　　D. 5.0

［听课笔记］

【规律提炼】

常见函数应用的基本模型是一次、二次、指数、对数、幂函数等模型，注意指数对数的互换以及指数对数的基本运算法则.

自测题

1. ［2025·北京四中测试］点声源亦称“球面声源”或“简单声源”. 已知点声源在空间中传播时，衰减量 ΔL（单位：dB）与传播距离 r（单位：m）的关系式为 $\Delta L=10\cdot\lg(\pi r^2)+k$，其中 k 为常数. 当传播距离为 r_1 时，衰减量为 ΔL_1；当传播距离为 r_2 时，衰减量为 ΔL_2. 若 $r_2=2r_1$，则 $\Delta L_2-\Delta L_1$ 约为（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）　（　）

A. 6 dB　　B. 4 dB

C. 3 dB　　D. 2 dB

2. ［2025·北京卷］在一定条件下，某人工智能语言模型训练 N 个单位的数据量所需要时间 $T=k\log_2 N$（单位：小时），其中 k 为常数，在此条件下，已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时，训练时间增加 20 小时，则当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时，训练时间增加（单位：小时）　（　）

A. 2　　B. 4

C. 20　　D. 40

高分提能一　几类常考函数的综合问题

【考情分析】 北京高考对于函数的综合考查一般难度较大，常以分段函数为背景，考查数形结合思想以及分类讨论思想，落脚点一般为函数的单调性、最值、极值、零点等. 本讲次以分段函数、新定义函数以及抽象函数三种函数为背景来呈现.

典型例题

类型一　分段函数

例 1 ［2023·北京卷］设 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x<-a,\\ \sqrt{a^2-x^2},-a\leqslant x\leqslant a,\\ -\sqrt{x}-1,x>a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

(1) $f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上单调递减；

(2) 当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)$ 存在最大值；

(3) 设 $M(x_1,f(x_1))(x_1\leqslant a)$，$N(x_2,f(x_2))(x_2>a)$，则 $|MN|>1$；

(4) 设 $P(x_3,f(x_3))(x_3<-a)$，$Q(x_4,f(x_4))(x_4\geqslant-a)$，若 $|PQ|$ 存在最小值，则 a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

其中所有正确结论的序号是________.

例 2 ［2025·西城二模］已知函数 $f(x)=\begin{cases}4x-4a,x\leqslant1,\\ x^2-2ax+3,x>1,\end{cases}$ 若对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+2)>f(x)$，那么实数 a 的取值范围是　（　）

A. $[-4,4)$　　B. $[-4,2]$

C. $(-\infty,4)$　　D. $(-\infty,2]$

例 3 [2025·海淀一模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-x^2,x\leqslant 1,\\ \log_a\left(\dfrac{1}{2}ax+3\right),x>1\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$. 若 $f(x)$的值域为$(-\infty,2]$,则 a 的值可以为________;若 $f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$,则 a 的取值范围是________.

[听课笔记]

【规律提炼】

1. 分类讨论:已知函数值(或范围)求自变量的值(或范围)时,常常先根据每一段的解析式分别求解,但要注意检验所求自变量的值(或范围)是否符合相应段的自变量的取值范围,然后综合各段的结果即可求解.

2. 数形结合:求解分段函数问题时,画出函数的图象,对代数问题进行转化,结合图形直观地分析判断,可以快速准确地解决问题.

自测题

1. [2025·北大附中测试] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x-1,x\leqslant 1,\\ 2x^2-ax+a,x>1,\end{cases}$ 若任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}(x_1\neq x_2)$,都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(0,1)$　　B. $(1,3]$

C. $[3,4]$　　D. $(1,4]$

2. [2025·门头沟一模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x+a}-a,x<-a,\\ b\sin x,x\geqslant -a\end{cases}$ $(a>0,b>0)$,若 $f(x)$既不存在最大值也不存在最小值,则下列 a,b 关系中一定成立的是 ( )

A. $a+b>\dfrac{1}{2}$　　B. $a+b<1$

C. $ab\leqslant\dfrac{1}{8}$　　D. $ab\geqslant\dfrac{1}{4}$

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}ax^2-1,x\leqslant a,\\ \ln(x-a),x>a,\end{cases}$ 若对任意 $x\in[0,+\infty)$,都有 $f(x)\geqslant f(0)$,则实数 a 的取值范围是________.

4. 设 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a,x<1,\\ x^2-3ax+2a^2,x\geqslant 1,\end{cases}$ 给出下列四个结论:

①当 $a=1$ 时,$f(x)$的最小值为$-\dfrac{1}{4}$;

②存在 $a\geqslant 0$,使得 $f(x)$只有一个零点;

③存在 $a>0$,使得 $f(x)$有三个不同零点;

④任意 $a\in(-\infty,0)$,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

其中所有正确结论的序号是________.